DDU GORAKHPUR UNIVERSITY GORAKHPUR

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS

National Education Policy-2020

Content

Of

Ability Enhancement Course

(AEC) In

Vedic Arithmetic

offered by

Department of Mathematics and Statistics

For

UG Programme

Course Title	Course Code	Credits	Pre-requisite for Course	Elective for SEC
Vedic Arithmetic	AE 1MAT	**2+0**	Mathematics in10th	Open to all

Course Code – AE1-MAT

Credit – 02

Vedic Arithmetic वैदिक अंकगणित

Unit I संकलन, व्यकलन, ऋणांक, पहाड़ा, वर्ग, घन एवं वैदिक सूत्रों के प्रयोग से गुणन प्रक्रिया वर्गमूल घनमूल, विभाजनीयता एवं भाग की संक्रिया वैदिक सूत्रों के प्रयोग द्वारा

Unit II महत्तम समापवर्तक, भिन्न वैदिक सूत्रो के प्रयोग द्वारा कूटांक परिचय
बीजीय संकलन, व्यकलन, बीजीय गुणन खंड, सरल समीकरण एवं मिश्रित गणनायें

संकलन

पूज्य स्वामी जगद् गुरू शंकराचार्य श्री भारती कृष्णतीर्थ जी महाराज द्वारा दिया गया पहला सूत्र

एकाधिकेन पूर्वेण, जिसका अर्थ है "पहले से एक अधिक के द्वारा"

संख्याओं को जोड़ना इससे सिखाया जाता है

उदाहरण :– 3+4, 3 को 4 बार एकाधिक करना पहली बार मे 4, दूसरी बार 4 को एकाधिक करने पर 5, तीसरी बार 5 को करने पर 6 और अन्तिम बार 6 को एकाधिक करने पर 7 आ जायेगा।

<u>परम मित्र अंक</u>

1 का परम मित्र 9 और 9 का 1 है

2 का परम मित्र 8 है और 8 का 2 है

3 का परम मित्र 7 है और 7 का 2

4 का परम मित्र 6 है और 6 का 4

5 का परममित्र 5 है

जोडने में परममित्र अंक का उपयोग

8+6 = 8+2+4 = 10+4 = 14

9+5 = 9+1+4 = 10+4 = 14

7+8 = 7+3+5 = 10+5 = 15

इसे शून्यांत संख्या का प्रयोग कर जोड़ना कहा जाता है।

198+87 विलोकन से स्पष्ट है कि 198 मे 2 जोड़ने पर 200 होगा।

87 मे से 2 कम हुये बचे 85; अब 200+85 = 285

अभ्यास माला :–

(1) 19+11 (2) 43+27 (3) 187+23 (4) 475+225

इसी प्रकार किसी अंक पर एकाधिक चिन्ह (˙) लगाने पर उसका मान एक अधिक हो जाता है:–

$\dot{6} = 6+1 = 7$

$9+\dot{2} = 9+3 = 12$

इस विधि मे संख्याओं की जोड़ते समय अंको का जोड़ जैसे ही दो अंको की संख्या में प्राप्त होता है अर्थात हासिल में एक प्राप्त होते ही बाये अंक (पूर्ण अंक) पर एकाधिक चिन्ह (˙) लगा देते है। इकाई मे अगले अंक को जोड़ते हुए संकलन की क्रिया पूर्ण करते है:–

उदाहरण 47+38

इकाई मे इकाई जोड 8+7 = 15

$4+\dot{3} = 4+4 = 8$

$$\begin{array}{r} 4\ 7 \\ +\dot{3}\ 8 \\ \hline 8\ 5 \\ \hline \end{array}$$

एकाधिक चिन्ह का प्रयोग (उदाहरण)

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ 8 \\ +2\ 8\ 9\ 5 \\ \hline \end{array}$$

(1) इकाई मे इकाई जोड़े 8+5 = 13

13 से प्राप्त हासिल (अतिरिक्त अंक) एक को 5 के पूर्ण अंक (बाये अंक) 1 पर एकाधिक चिन्ह (.) के रूप मे रख देगे। अर्थात हासिल 1 आते ही पूर्व अंक का एकाधिक कर देगे तथा 3 इकाई के नीचे उत्तर मे लिखेगें।

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ 8 \\ 2\ 8\ \dot{9}\ 5 \\ \hline 3 \end{array}$$

(2) दहाई मे दहाई जोड़े $7+\dot{9} = 7+10 = 17$

7 को दहाई के स्थान पर लिखे और 1 के लिये पूर्व अंक 8 एकाधिक चिन्ह लगा देगें

9 3 7 8

$$\begin{array}{r} 2\ \dot{8}\ \dot{9}\ 5 \\ \hline 7\ 3 \end{array}$$

(3) सैकड़े मे सैकड़ा

$3+\dot{8} = 3+9 = 12$

8 के पूर्व अंक का एकाधिक कर उत्तर मे सैकड़े के स्थान पर 2 लिख देगें।

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ 8 \\ \dot{2}\ \dot{8}\ \dot{9}\ 5 \\ \hline 2\ 7\ 3 \\ \hline \end{array}$$

(4) हजार मे हजार जोड़े $9+\dot{2} = 9+3 = 12$

2 के पूर्व अंक 0 का एकाधिक ($\dot{0}$) करे और 2 को नीचे लिख लेगे तथा $\dot{0} = 1$ दस हजार के स्थान पर उत्तर मे प्राप्त होगा।

नोटः— 12 को सीधे भी उत्तर मे लिखा जा सकता है। साथ ही हम जानते है कि संख्या में बायीं ओर शून्य रखने से कोई अन्तर नहीं आता

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ 8 \\ \dot{0}\ \dot{2}\ \dot{8}\ \dot{9}\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 2\ 7\ 3 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण

$$\begin{array}{r} 4\ 8\ 5\ 6 \\ \dot{3}\ \dot{8}\ \dot{7}\ 5 \\ \hline 8\ 7\ 3\ 1 \\ \hline \end{array}$$

<u>उत्तर की जांच विधि</u>

इस हेतु संख्या का बीजांक निकालना होगा, बीजांक उस संख्या के सभी अंको का जोड़ होता है चदि यह जोड़ 9 से अधिक अर्थात दो अंको मे आये तो इनको पुनः जोड़ा जाता है

26 का बीजांक 2+6 = 8
87 का बीजांक 8+7 = 15 = 1+5 = 6
387 का बीजांक 3+8+7 = 18 = 1+8 = 9
9983 का बीजांक 9+9+8+3 = 29 = 2+9 = 11 = 1+1 = 2

उत्तर की जांच के लिये जोड़े जाने वाली सभी संख्याओं का बीजांक निकाले और उनका जोड़कर पुनः बीजांक निकाले।

उत्तर की संख्या का बीजांक निकाले दोनो समान होने पर जोड़ सही है।

7873 बीजांक 7+8+7+3 = 25 = 2+5 = 7	7+5+6
6854 बीजांक 6+8+5+4 = 23 = 2+3 = 5	= 18 = 1+8
3075 बीजांक 3+0+7+5 = 15 = 1+5 = 6	= 9

————

17802   1+7+8+0+2 = 18 = 1+8 = 9

————

जोड़ सही है।

अभ्यास माला –

(1) 7 2 + 4 3 = ————

(2) 7 8 1 + 5 3 2 = ————

(3) 6 7 3 + 8 2 4 = ————

(4) 8 7 4 3, 7 8 4 7, + 6 3 8 3 = ————

(5) 4 8 7 0, 8 2 3 9, +5 4 7 2 = ————

व्यकलन

व्यकलन के लिये पूरक एंव सूत्र "एकन्यूनेन पूर्वेण" का ज्ञान आवश्यक है। किसी संख्या की पूरक संख्या प्राप्त करने के लिये स्वामी जी के सूत्र 'निखिलं नवतश्चरमं दशतः ' अर्थात सबको 9 मे से अंतिम को 10 मे से का उपयोग किया जाता है।

100 के लिये 83 का पूरक ज्ञात करना हो तो 9 से 8 को तथा 10 से 3 को व्यकलन करें।

9−8 = 1   10−3 = 7

पूरक संख्या 17 हुई

महत्तम समापवर्तक

दो या दो से अधिक संख्याओं का सबसे बड़ा अपवर्तक (गुणनखण्ड) ही उनका महत्तम समावर्तक कहलाता है । इसका संकेत म०स० है। म०स० ज्ञात करने की प्रचलित दो विधियों में से एक गुणनखण्ड विधि अच्छे स्तर के छात्रों के लिये है, अतः इस विधि पर सामान्य छात्र का निर्भर रहना उचित नहीं। दूसरी भाग की विधि यन्त्रवत्, लम्बी और अधिक समय लगाने वाली है। वैदिक गणित की विधि उपरोक्त सभी दोषों से मुक्त है। सरल, कम समय लेने वाली तथा विश्वसनीय है। यह विधि वैदिक गणितीय सूत्र संकलन, व्यवकलन पर आधारित है।

विधि के सिद्धान्त :-

1. दो संख्याओं का योग अथवा उनका अन्तर उनके महत्तम समापवर्तक का गुणज होता है। माना P, Q दो संख्याएँ तथा H = म०स० यदि $P = HA$ तथा $Q = HB$ तो $P \pm Q = H(A \pm B)$

2. यदि दो संख्याओं का अन्तर छोटी संख्या के तुल्य होता है तो यह छोटी संख्या ही म०स० होती है। यदि $P-Q=Q$ तो $Q=H$

3. दो संख्याओं से प्राप्त क्रमबद्ध अन्तरों के अन्तर (न्यूनतम एवं परस्पर समान) ही महत्तम समापवर्तक के तुल्य होते हैं ।

4. विभिन्न गणनाओं से प्राप्त अनेक अन्तर (शेषफल) यदि परस्पर तुल्य हों तो वह अन्तर ही म.स. होता है ।

5. दो से अधिक संख्याओं का म०स० ज्ञात करना हो तो कोई दो संख्याओं के योग में से तीसरी संख्या घटा देते हैं। यह शेषफल तीनों संख्याओं का म०स० का गुणज होता है । प्रयास यह रहे कि शेषफल न्यूनतम हो ।

यदि P=HA, Q=HB तथा R=HC तो P+Q-R=H(A+B-C) इसी प्रकार

LP + mQ-nR = H(Al + Bm - Cn)

गुणक 1,m,n के मान इस प्रकार चुनें कि Al+Bm-Cn का मान न्यूनतम आए।

विधि (1) बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाइये। यह शेषफल ही प्रथम अन्तर है।

(2) दूसरा अन्तर प्राप्त करने के विभिन्न क्रिया पदः-

i. दूसरा अन्तर = छोटी संख्या - प्रथम अन्तर

ii. अथवा = छोटी संख्या का गुणज - प्रथम अन्तर

iii. = प्रथम अन्तर का गुणज - छोटी संख्या

सावधानी रखें कि जिन दो संख्याओं का योग या अन्तर निकालना है उसमें एक बार में एक ही संख्या का गुणज लें।

iv. अन्त में उत्तर म०स० का सत्यापन करना उत्तम रहता है। निम्न उदाहरणों से विधि को स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (1) - 95 व 57 का म०स० जात करें।

संख्याओं का प्रथम अन्तर = 95 - 57 = 38 , अतः म०स०≤38

ध्यान दें, म०स० को 38 से छोटा होना है तो यह 38 का

अपवर्तक ही होगा अर्थात् 19, 2, 1 में से कोई होगा।

संख्याओं का दूसरा अन्तर 57x2-95 विधि (2)(i) से

=114-9519 अतः म०स०≤19

तीसरा अन्तर = 38-19 19 अतः म०स o = 19

उदाहरण (2) - 70 व 42 का म०स० ज्ञात करें।

प्रथम अन्तर = 70 - 42 = 28 , अतः मस≤28

दूसरा अन्तर 42-28 14 विधि (2) (i) से, अतः म०स०≤14

तीसरा अन्तर r = 28 - 14 = 14 अतः म०स० = 14

उदाहरण (3) - 145 व 232 का म०स० ज्ञात करें।

प्रथम अन्तर 232-145 87, अतः म०स० ≤ 87

दूसरा अन्तर = 87 x 2 - 145 विधि (2) (iii) से,

174-145 = 29 अतः म०स० ≤ 29

तीसरा अन्तर 87 - 29 x 2

= 87-58 = 29 अतः म०स० = 29

उदाहरण (4) - 156 व 221 का म०स० ज्ञात कीजिए ।

प्रथम अन्तर = 221 - 156 = 65 , अतः म०स o ≤ 65

दूसरा अन्तर = 156 - 65 x 2 विधि (2) (iii) से,

= 156-130= 26 अतः म०स० ≤ 26

तीसरा अन्तर = 65 - 26 x 2 विधि (iii) से

= 65-52 = 13 अतः म०स० ≤ 13

चौथा अन्तर 26-13 = 13 अतः म०स० = 13

उदाहरण (5) - 238 व 255 का म०स० ज्ञात कीजिए ।

प्रथम अन्तर 255-238 = 17, अतः म०स० ≤ 17

दूसरा अन्तर = 238 - 17 x 4 विधि (2) (iii) से,

= 170

= 17 का गुणज अतः म०स० 17

उदाहरण (6) - 48, 64 व 80 का म०स० ज्ञात करें ।

प्रथम अन्तर 64-48 =16

दूसरा अन्तर = 80-64 = 16

तीसरा अन्तर = 48 * 2 - 80 = 16 विधि (iii) से

अतः म०स० = 16

उदाहरण (7) - 671, 781 तथा 1430 का म०स० ज्ञात करें ।

संकलन–व्यवकलन से प्रथम अंतर 671+781-1430

= 1452-1430 = 22 अतः म०स० ≤ 22

671 अथवा 781 संख्या 22 या 2 से विभाजित नहीं अतः 22 से छोटा अपवर्तक = 11

म०स० = 11

उदाहरण (8) - वह बड़ी से बड़ी संख्या बताइये जिससे संख्याएँ 49, 59 तथा 109 में से क्रमशः 1, 3, 5 घटाने पर प्राप्त शेषफल पूरा–पूरा विभाजित हो जाए । संख्याओं में से 1,3,5 घटाने पर शेषफल हुए 49 - 1 = 48 , 59-3=56, 109-5=104

शेषफलों का म०स० ज्ञात करना है ।

प्रथम अन्तर = 56-48 = 8 अतः म०स० 8

दूसरा अन्तर = 56 x 2-104 = 8

दोनों अन्तर समान हैं। अतः म०स० = 8

लघुतम समापवर्त्य : -

लघुतम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या है जिसमें दी हुई संख्याओं का पूरा-पूरा भाग दिया जा सकता है। ल.स. ज्ञात करने की विधि बड़ी सरल तथा उपसूत्र आनुरूप्येण पर आधारित है।

दो संख्याओं का ल.स.ज्ञात करने की विधि :-

1. दो संख्याओं को भिन्न रूप में रखकर उनके सामने उनका सरलतम रूप लिखिये।

2. तिर्यक गुणन कीजिये। ये दोनों गुणनफल समान होंगे।

3. यह गुणनफल ही ल.स. है।

4. यदि संख्याएँ बड़ी हैं और उनका सरल अनुपात निकालने में कठिनाई आ रही है तो संकलन व्यवकलन विधि से दोनों का म०स० ज्ञात कीजिये तथा बाद में उनका सरल अनुपात।

5. सरल अनुपात ज्ञात करने के लिए विभाजनीयता के नियमों की सहायता भी ली जा सकती है।

उदाहरण (1) - 57 व 95 का ल०स० ज्ञात करें।

57/95 = 3/5 = 3/5 ल०स० = 57 x 5 = 285 अथवा ल०स० = 95 x 3 = 285

उदाहरण (2) - 671 व 781 का ल.स. ज्ञात कीजिये।

संख्या 671 में 6+1=7 अतः संख्या 11 से विभाजित।

इसी प्रकार संख्या 781 भी 11 से विभाजित ।

अतः 671/781 = (61/ 71) = 61/71 अतः ल०स० = 671 x 71 = 47641

अथवा ल०स० = 781 x 61 = 47641

तीन संख्याओं का ल.स. ज्ञात करना:-

विधि :– कोई दो संख्याओं का ल०स० आनुरूप्येण विधि से ज्ञात कीजिये। अब इस प्रकार से प्राप्त ल०स० और तीसरी संख्या का ल०स० ज्ञात कीजिये। अन्तिम ल०स० ही तीनों संख्याओं का लघुतम समपावर्त्य होता है।

उदाहरण (3) - 15, 27 तथा 72 का ल०स० ज्ञात कीजिये।

सर्वप्रथम 15 व 27 का ल०स० ज्ञात करना है।

अतः 15/27 = 5/9 अतः ल०स० = 15 x 9 = 135

अब 135 व 72 का ल०स० ज्ञात करिये।

72/135 = 72/(15 x 9) = 8/15

अतः तीनों संख्याओं का ल०स० = 72 x 15 = 1080

भिन्न

सामान्यतः भिन्नों का क्रम, योग तथा व्यवकलन ज्ञात करने के लिए तुल्य भिन्न का उपयोग किया जाता है परन्तु वैदिक गणित में सूत्र "ऊध्वतिर्यग्भ्याम्" के प्रयोग से इन्हें सफलतापूर्वक ज्ञात किया जाता है।

भिन्न क्रम :–

1. यदि दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान हों तो जितना बड़ा अंश हो उतनी बड़ी भिन्न जैसे : 5/8 > 4/8 > 3/8

2. यदि दी हुई भिन्नों के अंश परस्पर समान हों तो जितना बड़ा हर हो उतनी छोटी भिन्न जैसे : 1/5 < 1/4 < 1/3

3. यदि दी हुई भिन्नों के अंश तथा हर सभी अलग–अलग हों तो वैदिक गणित से सूत्र उर्ध्व तिर्यक पर आधारित तिर्यक गुणन के प्रयोग से उनका क्रम निश्चित किया जा सकता है ।

(1) जिस भिन्न का तिर्यक गुणनफल बड़ा, वह भिन्न बड़ी ।

(i) जिन भिन्नों के तिर्यक गुणनफल समान, वे भिन्न बराबर या तुल्य। उपरोक्त सम्पूर्ण सक्रिया निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण - 3/4 व 4/5 में बड़ी भिन्न बताइये ।

संकेत

(i) तिर्यक गुणनफल बने 5 x 3 = 15 तथा 4 x 4 = 16

(ii) जो तिर्यक गुणनफल बड़ा, वह भिन्न बड़ी

(iii) 15 < 16 अतः 3/4 < 4/5

भिन्नों का योग:-

1. यदि भिन्नों के हर परस्पर समान हों तो

भिन्नों का योग =अंशों का योग / हर

जैसे

1/5+2/5 = 1+2/5 = 3/5

2 यदि दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं। और उनमें कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड भी नहीं हैं तो इन भिन्नों का योग ऊर्ध्व तिर्यक द्वारा बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है ।

सूत्र आधारित विधि – भिन्नों का योग = तिर्यक गुणनफलों का योग/ हरों का गुणनफल

विधि को निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : योग कीजिए 2/3 + 4/5

= (2 x 5 + 3 x 4)/(3 x 5) संकेत

= 10 + 12/15

(i) बनने वाले तिर्यक गुणन 2x5 तथा 3x4

= 22/15 = 1 $\frac{7}{15}$

(ii) हरों का गुणनफल = 3 x 5 = 15

उदाहरण : योग कीजिए 1/2 + 2/3 + 4/5

= (1 x 3 x 5 + 2 x 2 x 5 + 4 x 2 x 3)/(2 x 3 x 5)

= (15 + 20 + 24)/30 = 59/30 = $1\frac{29}{30}$

संकेत

(i) तिर्यक गुणन 1x3x5 तथा 2 x 2 x 5 तथा 4 x 2 x 3 हैं । एक के हर को छोड़कर अन्य हरों से गुणा (अन्य भी ऐसे ही)

(ii) हरों का गुणनफल = 2 x 3 x 5 = 30

मिश्र भिन्नों का योग :- मिश्र भिन्नों का योग भी वैदिक गणित सूत्र विलोकनम् तथा तिर्यक गुणन के प्रयोग से ज्ञाप्त किया जा सकता है ।

उदाहरण :- योग कीजिए $1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3}$

संकेत

= 1 + 3/4 + 2 + 1/3 (i) विलोकनम् सूत्र से मिश्र भिन्न के

= 3 + 3/4 + 1/3 (ii) दो टुकड़े करें

$1\frac{3}{4}$ = 1 + 3/4 तथा $2\frac{1}{3}$ = 2 + 1/3

= 3 + (3 x 3 + 1 x 4)/(4 x 3)

= 3 + 13/12 = 3 + $1\frac{1}{12}$ (ii) 1+2=3 तथा 3/4 + 1/3 पूर्व विधि से करें।

= $4\frac{1}{12}$ (iii) दोनों का योग = उत्तर 1

(iv) सामान्य रीति में $1\frac{3}{4}$ व $2\frac{1}{3}$ को 7/4 7/3 व में बदल कर इनका जोड़ करते हैं। फिर उत्तर को मिश्र भिन्न में परिवर्तित करते हैं।

ध्यातव्य :- यदि कक्षा में लघुतम समापवर्त्य का पाठ पढ़ा दिया गया है तो उपरोक्त विधि के स्थान पर हरों का ल.स. कर भिन्नों का योगफल ज्ञात किया जा सकता है ।

भिन्नों का व्यवकलन

भिन्नों की व्यवकलन संक्रिया भिन्नों के योग की क्रिया से मिलती-जुलती है ।

1. यदि हर परस्पर समान तो भिन्नों के व्यवकलन में

शेषफल = अंशों का अन्तर / हर

2. यदि दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों तो भिन्नों का तिर्यक

व्यवकलन = गुणनफलों का अन्तर / हरों का गुणनफल

3. मिश्र भिन्नों का व्यवकलन योग संक्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक गुणन के प्रयोग से भी निकाला जा सकता है । कभी-कभी मिश्र भिन्नों का व्यवकलन इन्हें साधारण भिन्नों में बदलकर ज्ञात करना सुविधाजनक होता है ।

उदाहरणों से उपरोक्त नियम स्पष्ट किए जा रहे हैं:-

उदाहरण : 3/5 - 1/5 = (3 - 1)/5 = 2/5

उदाहरण : 4/5 - 2/3 = (4 x 3 - 2 x 5)/(5 x 3) = 2/15

उदाहरण : 1/2 + 1/3 - 1/5 = (1 x 3x 5 + 1 x 2 x 5 - 1 x 2 x 3)/(2x 3 5)

= (15 + 10 - 6)/30 = 19/30

उदाहरण : $3\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5}$

= 3 + 3/4 - 3 - 2/5 = 3/4 - 2/5 = (3 x 5 - 2 x 4)/(4 x 5) = (15 - 8)/20 = 7/20

उदाहरण : $3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$

= 7/2 - 7/4

संकेत

= (7 x 4 - 2 x 7)/(2 x 4)

(i) 3/4 अधिक है ½ से

= (28 - 14)/8 = 14/8 = 7/4

अतः साधारण भिन्नों में बदल कर हल करें।

= $1\frac{3}{4}$

(ii) 14/8 का सरलतम रूप = 7/4

अन्य विधि : 3/4 > 1/2 अतः 3/4 का पूरक 1/4 जोड़ें और पूर्व अंक 1 का एकाधिक करें ।

$3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$ = 3 + 1/2 - 2 + 1/4 = 3 - 2 + 1/2 + 1/4

= 1 + 2/4 + 1/4 = $1\frac{3}{4}$ [1/2 = 2/4]